Муниципальное общеобразовательное учреждение

«Средняя школа № 78 Краснооктябрьского района Волгограда»

РАССМОТРЕНО

МО учителей

_____

_____ Устинова М.К.

Подпись ФИО

Протокол МО № 1

от 31.08.2026

СОГЛАСОВАНО

Заместитель директора по УВР

_____ Шмондина И.В

Подпись ФИО

Дата: 31.08.2026

УТВЕРЖДЕНО

Директор МОУ СШ № 78

_____ Егоркина Г.Н.

Подпись ФИО

Приказ от 31.08.2026г. № 196

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

элективного курса по математике

Методы решения задач с параметрами

для обучающихся 9 класса

МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ "СРЕДНЯЯ ШКОЛА № 78 КРАСНООКТЯБРЬСКОГО РАЙОНА ВОЛГОГРАДА"

Подписан: МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ "СРЕДНЯЯ ШКОЛА № 78 КРАСНООКТЯБРЬСКОГО РАЙОНА ВОЛГОГРАДА"
DN: C=RU, S=Волгоградская область, STREET=ул. им. Хользунова 33, L=Волгоград, T=Директор, O="МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ""СРЕДНЯЯ ШКОЛА № 78 КРАСНООКТЯБРЬСКОГО РАЙОНА ВОЛГОГРАДА""", ОГРН=1023402639490, СНИЛС=02188654461, ИНН ЮЛ=3442037852, ИНН=344204953130, E=school78@volgadmin.ru, G=Галина Николаевна, SN=Егоркина, CN="МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ""СРЕДНЯЯ ШКОЛА № 78 КРАСНООКТЯБРЬСКОГО РАЙОНА ВОЛГОГРАДА"""
Основание: я подтверждаю этот документ
Местоположение: место подписания
Foxit Reader Версия: 10.1.1

Целью профильного обучения, как одного из направлений модернизации математического образования является обеспечение углубленного изучения предмета и подготовка учащихся к продолжению образования. Математическое образование в системе общего образования занимает одно из ведущих мест, что определяется безусловной практической значимостью математики, ее возможностями в развитии и формировании мышления человека, ее вкладом в создание представлений о научных методах познания действительности.

Решению задач с параметрами в школьной программе уделяется мало внимания. Большинство учащихся либо вовсе не справляются с такими задачами, либо приводят громоздкие выкладки при их решении. Причиной этого является отсутствие системы заданий по данной теме в школьных учебниках.

Предлагаемый элективный курс рассчитан на 17 ч., является предметно-ориентированным и предназначен для реализации в старших классах общеобразовательной школы для расширения теоретических и практических знаний учащихся. Программа курса «Решение задач с параметрами» предполагает изучение таких вопросов, которые не входят в базовый школьный курс математики, но необходимы при дальнейшем ее изучении. Запланированный данной программой для усвоения учащимися объем знаний необходим для успешной сдачи выпускного экзамена. Владение приемами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления. Задачи с параметрами дают прекрасный материал для настоящей учебно-исследовательской работы.

Изучение данного курса тесно связано с такими дисциплинами, как алгебра, алгебра и начала анализа, геометрия. Курс призван помочь ученику оценить как свой потенциал с точки зрения перспективы дальнейшего обучения, так и повысить уровень его общей математической культуры.

В связи с этим учащиеся затрудняются решать задачи с параметрами. Это связано с отсутствием ясного понимания решения квадратного уравнения, как зависимости от переменных а,в,с, не вырабатывается умение анализа самой

задачи. Поэтому я предлагаю после изучения той или иной темы, связанной с уравнениями или неравенствами или их системами предложить учащимся исследовать несколько уравнений, составить самим задачи или серию задач.

Цель курса:

- ✓ Формирование у учащихся умений и навыков по решению задач с параметрами, сводящихся к исследованию линейных и квадратных уравнений и неравенств, расширение и систематизация знаний учащихся, подготовка их к более осмысленному пониманию теоретических сведений.
- ✓ Создание условий для самореализации учащихся в процессе учебной деятельности, развитие их исследовательских и познавательных способностей.
- ✓ Обеспечить условия для самостоятельной творческой работы.

Для достижения поставленных целей в процессе обучения решаются следующие задачи:

Приобщить учащихся к работе с математической литературой.

Научить применять алгоритм решения уравнений, неравенств, содержащих параметр.

Обеспечить диалогичность процесса обучения математике.

В результате изучения курса учащиеся должны уметь:

- ✓ Свободно оперировать аппаратом алгебры при решении задач с параметрами.
- ✓ Знать основные методы решения задач с параметрами (по определению, по свойствам функции, графически и т. д.) и применять их при решении задач.

При изучении курса используются такие формы занятий, как лекция, практикум, индивидуальные задания, составление презентаций по одной или группе задач. Содержание каждой темы включает в себя самостоятельную работу, работу с различными источниками математической литературы. Заканчивается курс зачётной работой по выбору учащегося.

Структура курса и планирования учебного материала

№	Тема урока	Число часов
1	Введение. Типы задач с параметрами.	1
2	Решения линейных уравнений, содержащих параметры. Уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям, содержащих параметры.	1
3	Решения линейных неравенств, содержащих параметры.	1
4	Решение текстовых задач содержащие линейные уравнения с параметрами и модулями. Графический способ решения линейных уравнений с параметрами и модулями.	4
5	Квадратные уравнения, содержащие параметры.	2
6	Свойства квадратичной функции в задачах с параметрами.	2
7	Основные методы решения задач с параметрами.	4
8	Итоговая работа	1
	Резерв	1
	Итого	17

Краткое содержание курса

1. Первоначальные сведения. Цель: дать первоначальное представление учащемуся о параметре и помочь привыкнуть к параметру, к необычной форме ответов при решении уравнений.

Определение параметра. Типы задач с параметрами. Виды уравнений и неравенств, содержащие параметр. Решение простейших уравнений с параметрами.

2. Решение линейных уравнений (и уравнений приводимых к линейным), содержащих параметр.

Цель: Поиск решения линейных уравнений в общем, виде; исследование количества корней в зависимости от значений параметра.

Общие подходы к решению линейных уравнений. Решение линейных уравнений, содержащих параметр. Решение уравнений, приводимых к линейным.

Решение линейно-кусочных уравнений. Применение алгоритма решения линейных уравнений, содержащих параметр. Геометрическая интерпретация. Решение системных уравнений.

3. Решение линейных неравенств, содержащих параметр.

Цель: Выработать навыки решения стандартных неравенств и приводимых к ним, углубленное изучение методов решения линейных неравенств. Определение линейного неравенства. Алгоритм решения неравенств. Решение стандартных линейных неравенств, простейших неравенств с параметрами. Исследование полученного ответа. Обработка результатов, полученных при решении.

4. Решение текстовых задач содержащие линейные уравнения с параметрами и модулями. Графический способ решения линейных уравнений с параметрами и модулями.

Цель: Создание математической модели текстовых задач и выделение условий по составлению линейных уравнений с параметрами. Графический способ решения линейных уравнений с параметрами. Решение уравнений с модулями.

5. Квадратные уравнения, содержащие параметр.

Цель: формировать умения и навыки решения квадратных уравнений с параметрами.

Актуализация знаний о квадратном уравнении. Исследования количества корней, в зависимости от дискриминанта. Использование теоремы Виета. Исследование трехчлена.

Алгоритм решения уравнений.

6. Свойства квадратичной функции в задачах с параметрами.

Цель: познакомить с многообразием задач с параметрами.

Область значений функции. Область определения функции. Монотонность. Координаты вершины параболы. Расположение корней квадратного трехчлена.

Основные методы решения задач с параметрами (6часов)

Аналитический способ решения. Графический способ. Классификация задач, с позиций применения к ним методов исследования.

Методические рекомендации по содержанию и проведению занятий

I. Что такое параметр?

Определение. Параметром называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Если вы вспомните некоторые основные уравнения (например, kx+l=0, ax2+bx+c=0), то обратите внимание, что при поиске их корней значения остальных переменных, входящих в уравнения, считаются фиксированными и заданными. Все разночтения в существующей литературе связаны с толкованием того, какими фиксированными и заданными могут быть эти значения остальных переменных.

Комментарий. Независимость параметра заключается в его «неподчинении» свойствам, вытекающим из условия задачи. Например, из неотрицательности левой части уравнения |x|=a–1 не следует неотрицательность значений выражения a–1, и если a–1<0, то мы обязаны констатировать, что уравнение не имеет решений.

Определение: Допустимым значением параметра называется такое его значение, при котором область определения данной задачи есть непустое множество.

II. Что означает «решить задачу с параметром»?

Естественно, это зависит от вопроса в задаче. Если, например, требуется решить уравнение, неравенство, их систему или совокупность, то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству. Если же требуется найти значения параметра, при которых множество решений уравнения, неравенства и т. д. удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи и состоит в поиске указанных значений параметра. Более прозрачное понимание того, что означает решить задачу с параметром,

сформируется после ознакомления с примерами решения задач на последующих уроках.

III. Какие основные типы задач с параметрами?

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных типов.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Обращаем внимание на то, что при решении задач данного типа нет необходимости ни решать заданные уравнения, неравенства, их системы и совокупности и т. д., ни приводить эти решения; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени. Однако не стоит абсолютизировать сказанное, так как иногда прямое решение в соответствии с типом 1 является единственным разумным путем получения ответа при решении задачи типа 2.

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Легко увидеть, что задачи типа 3 в каком-то смысле обратны задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;

2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.

Комментарий. Многообразие задач с параметром охватывает весь курс школьной математики (и алгебры, и геометрии), но подавляющая часть из них на выпускных и вступительных экзаменах относится к одному из четырех перечисленных типов, которые по этой причине названы основными.

IV. Каковы основные способы (методы) решения задач с параметром?

Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Комментарий. По мнению многих авторов, аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x; y), или в координатной плоскости (x; a).

Комментарий. Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром», что они начинают игнорировать другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом и с колоссальными трудностями остальными способами. Поэтому на начальной стадии изучения опасно начинать с графических приемов решения задач с параметром.

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым.

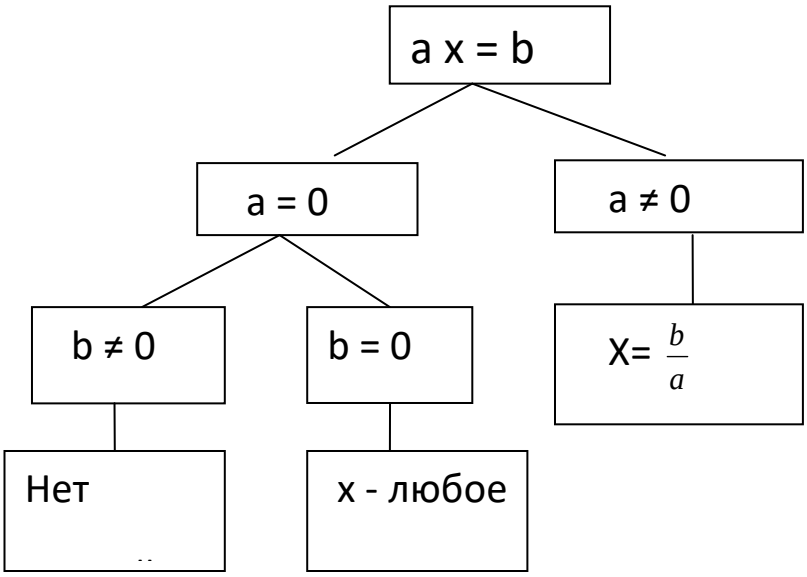
После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

Тема:Решения линейных уравнений, содержащих параметры.

Уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям, содержащих параметры. (4 ч.)

Определение. Линейным уравнением называется уравнение вида ax +b = 0, где a,b – некоторые выражения, зависящие от параметров, x – переменная.

Оно приводится к виду ax = b и при a ≠ 0 имеет единственное решение x = при каждой системе допустимых значений параметров (допустимыми мы будем считать те значения параметров, при которых a и b действительны).При a=0 и при b =0 x – любое число, а при a=0 и b≠ 0 решений нет. Итак, мы получили следующую схему решения линейного уравнения.



Линейное уравнение, записанное в общем виде, можно рассматривать как уравнение с параметрами : $ax = b$, где x – неизвестное, a, b – параметры. Для этого уравнения особым или контрольным значением параметра является то, при котором обращается в нуль коэффициент при неизвестном. При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, когда параметр равен своему особому значению и отличен от него. Особым значением параметра, а является значение, $a = 0$.

П р и м е р 1.Для всех значений параметра а решить уравнение

$(a^2 - 1)\cdot x = a + 1$.

Р е ш е н и е. Уравнение уже записано в стандартном виде, поэтому исследуем его по общей схеме 1.

а) если $a^2 - 1 = 0$, т.е. $a = 1$ или $a = -1$, то при $a = 1$ уравнение имеет вид : $0\cdot x = 2$, которое не имеет решений,

при $a = -1$ уравнение имеет вид: $0\cdot x = 0$, где х-любое число.

b) если $a^2 - 1 \neq 0$, имеем $x = \frac{1}{a-1}$.

О т в е т. Если $a = -1$, то х-любое ; если $a = 1$, то нет решений;

если $a \neq -1$, $a \neq 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$.

Далее выделим класс задач, где за счет параметра на переменную накладываются какие- либо искусственные ограничения. Для таких задач характерны следующие формулировки : *при каком значении параметра уравнение имеет одно решение, два, бесконечно много, ни одного; решением уравнения является какое-то подмножество действительных чисел и др.*

П р и м е р 2.Найти все значения параметра а при каждом из которых решение

уравнения $2x - 5a = 3 - 4ax$ не больше 2.

Р е ш е н и е. Приведем уравнение к стандартному виду:

$(2 + 4a)x = 3 + 5a$.

а) если $2 + 4a = 0$, т.е. $a = -0{,}5$, то уравнение имеет вид $0\cdot x = 0{,}5$ и оно не имеет решений.

b) если $2 + 4a \neq 0$, т. е. $a \neq -0{,}5$, то $x = \frac{3+5a}{2+4a}$.

Условию задачи удовлетворяют только те значения а , при которых

$x \leq 2$, следовательно, решаем неравенство: $\frac{3+5a}{2+4a} \leq 2$, откуда получаем ответ.

О т в е т. $a \in (-\infty ; -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{1}{3}; +\infty)$. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Задачи для самостоятельного решения:

1. В зависимости от значений параметра а решить уравнения:

1) $(a^2-1)x=2a^2+a-3$ Ответ: При $a=1$, $x \in R$, при $a=-1$, нет корней, при $a\neq1$ и $a\neq-1$ $x = \frac{2a+3}{a+1}$

2) $2a(a-2)x=a-2$ Ответ: при $a=0$, нет корней, при $a=2$ $x \in R$, при $a\neq0$ и $a\neq2$ $x = \frac{1}{2a}$

3) $\frac{a+x}{x^2-5x-6}$ Ответ: при $a\neq1$, $a\neq-6$, то $x=-a$, при $a=1$, $a=-6$ $x \in \varnothing$

Крамор В.С. «Задачи с параметрами и их решения» стр 26- 34

$\frac{3kx-5}{(k-1)(x+3)} + \frac{3k-11}{k-1} = \frac{2x+7}{x+3}$.

Ответ: если $k \neq -\frac{2}{5}$, $k \neq 1$, $k \neq \frac{9}{4}$, то $x = \frac{31-2k}{4k-9}$;

если $k = -\frac{2}{5}$ или $k = \frac{9}{4}$, то корней нет;

если $k = 1$, то уравнение не имеет смысла.

4)

Найти значения параметра m, при которых уравнение

$$m^2x - m^2 + 6 = 4x + m$$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений.

Ответ: а) $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$;
б) $m = -2$; в) $m = 2$.

В зависимости от значений параметра k решить уравнение

6) $$\frac{2}{kx+2} = \frac{1}{2x+k}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение:

а) $\frac{a}{x+1} = 2$; б) $\frac{a+5}{x-3} = a$; в) $a^2x - a = 4x + 2$;

г) $9b^2x - 3b = 4x - 2$; д) $x + \frac{3}{a^3} = \frac{1}{a^2}(9x + 1)$.

2. При каких значениях a имеет бесконечное множество решений уравнение:

а) $6(ax - 1) + a = 3(a - x) - 5$;

б) $\frac{2}{3}(x - 1) = \frac{4}{3} + a(3 - x)$?

3. При каких значениях a не имеет решений уравнение:

а) $2(3x - 2a) = 2 + ax$;

б) $a^2x = a(1 + 5x) - 2 - 6x$?

4. При каких значениях b уравнение:

а) $(a + 1)x = 2b - a$;

б) $(2a - 1)x = b + a - 1$;

в) $(a + 2)x = 3b - a + 1$

имеет решение для любого значения a?

5. Решить уравнение:

а) $\frac{x-a}{x+2} = 0$; б) $\frac{x-3}{x+2} + \frac{4}{a-1} = \frac{2}{(a-1)(x+2)}$;

в) $\frac{x}{a} + \frac{x+a}{a+3} + \frac{a}{3} = 1$; г) $\frac{x-a}{a+2} = \frac{x+a}{a+1}$;

д) $\frac{3x-2}{a^2-2a} + \frac{x-1}{a-2} + \frac{2}{a} = 0$; е) $\frac{5+x-ax}{4-x^2} = 0$.

6. При каких значениях a каждый корень уравнения $2(x - 2a) = 3 + a$ удовлетворяет условию $x \in [-1; 3]$?

Ответы

1. а) Если $a \neq 0$, то $x = \frac{a-2}{2}$; если $a = 0$, то нет корней; б) если $a \neq 0$, $a \neq -5$, то $x = \frac{4a+5}{a}$; если $a = 0$, $a = -5$, то нет корней; в) если $a \neq -2$, $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a-2}$; если $a = -2$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = 2$, то нет корней; г) если $b \neq -\frac{2}{3}$, $b \neq \frac{2}{3}$, то $x = \frac{1}{3b+2}$; если $b = \frac{2}{3}$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $b = -\frac{2}{3}$, то нет корней; д) если $a \neq 0$, $a \neq -3$, $a \neq 3$, то $x = \frac{1}{a(a+3)}$; если $a = 3$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = 0$, $a = -3$, то нет корней. **2.** а) При $a = -\frac{1}{2}$; б) при $a = -\frac{2}{3}$. **3.** а) При $a = 6$; б) при $a = 3$. **4.** а) При $b = -\frac{1}{2}$; б) при $b = \frac{1}{2}$; в) при $b = -1$. **5.** а) Если $a \neq -2$, то $x = a$; если $a = -2$, то корней нет; б) если $a \neq -3$, $a \neq 0{,}6$, $a \neq 1$, то $x = \frac{3(a-3)}{a+3}$; если $a = -3$, $a = 0{,}6$, $a = 1$, то корней нет; в) если $a \neq -3$, $a \neq -1{,}5$, $a \neq 0$, то $x = -\frac{a(a^2+3a-9)}{3(2a+3)}$; если $a = -3$, $a = 1{,}5$, $a = 0$, то корней нет; г) если $a \neq -2$, $a \neq -1$, то $x = -(2a^2 + 3a)$; если $a = -2$, $a = -1$, то корней нет; д) если $a \neq -3$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = \frac{6-a}{a+3}$; если $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$, то корней нет; е) если $a \neq -1{,}5$, $a \neq 1$, $a \neq 3{,}5$, то $x = \frac{5}{a-1}$; если $a = -1{,}5$, $a = 1$, $a = 3{,}5$, то корней нет. **6.** $a \in [-1;\ 0{,}6]$.

3. Решения линейных неравенств, содержащих параметры. (2ч)

На последующих уроках необходимо рассмотреть понятие линейных неравенств с параметрами, на практических занятиях нужно повторить свойства линейных неравенств и использовать их при решении линейных неравенств с параметрами

Определение. Неравенство, обе части которого являются линейными функциями относительно переменной, называется линейным.

В общем виде линейное неравенство записывается так :

$$kx+l > mx+n.$$

Определение. Два неравенства с одной переменной называются равносильными, если их решения совпадают.

При решении неравенств опираемся на следующие теоремы о равносильных преобразованиях:

Теорема 1. Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному

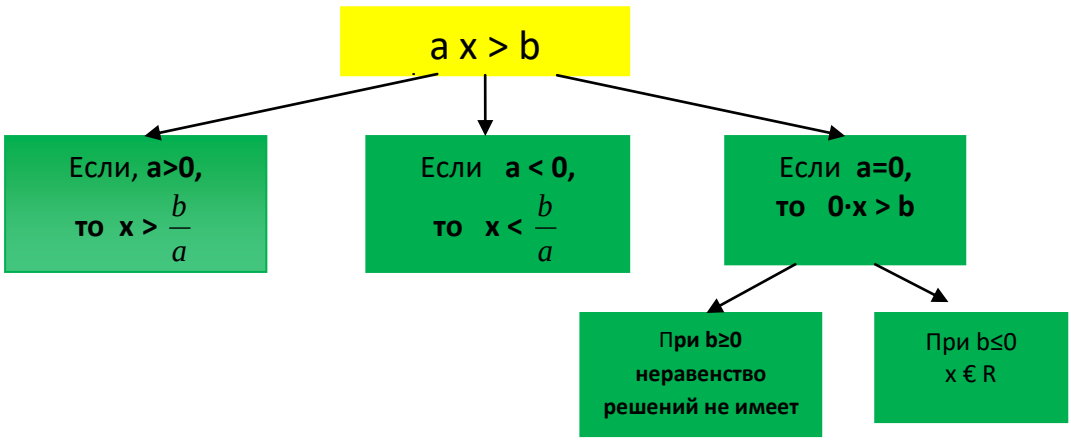
Выполнив равносильные преобразования неравенства $kx+l > mx+n$, получим $(k-m)x > n-1$. Обозначив $k - m = a$, $n - l = b$, получим $ax > b$.

Как и в линейном уравнении, опять контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в нуль. Но для оценки качественного изменения неравенства следует учесть, что процедура решения неравенства зависит от знака коэффициента при x.

Если он положителен, то мы используем теорему 2, если же он отрицателен, то используем теорему 3. Поэтому надо рассмотреть 3 случая для коэффициента a :

$a=0$, $a>0$, $a<0$.

С х е м а 1. Решение неравенства ax >b



П р и м е р 3. Для всех значений параметра а решить неравенство 2а(а-2)х >а-2.

Р е ш е н и е. Данное неравенство является линейным относительно переменной х. Рассмотрим значения а при которых 2а · (а-2)=0, т.е. а=0 или а=2. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка : (-∞; 0), (0; 2), (2; +∞).

Значит, надо рассмотреть пять случаев:1) а=0; 2) а=2 ; 3) а< 0 ; 4) 0 < а < 2 ; 5) а > 2

При а=0 неравенство принимает вид 0·х > -2, то есть х- любое действительное число.

При а = 2 неравенство принимает вид 0·х > 0, то есть не имеет решений.

При а <0 коэффициент а(а-2) положителен, поэтому $x > \frac{1}{2a}$

При 0 < а < 2 коэффициент а(а-2) отрицателен, поэтому $x < \frac{1}{2a}$

При а >2 коэффициент а(а-2) положителен, поэтому $x > \frac{1}{2a}$

О т в е т. При а=0 х –любое, при а=2 решений нет,

при 0< а< 2 $x < \frac{1}{2a}$, при а <0 или а > 2 $x > \frac{1}{2a}$

Пример 2. Для всех значений а решить неравенство:

$\frac{x}{a} < 3x - 1$

После преобразования имеем $\frac{(3a-1)}{a} x < 1$ Если скобка перед х положительна, т.е. при $\frac{3a-1}{a} > 0$ или $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ то $x >$ $\frac{a}{3a-1}$. Если скобка перед x отрицательна, т. е $\frac{3a-1}{a} < 0$ или $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ то $x < \frac{a}{3a-1}$. Если же $a = 0$ или $a = \frac{1}{3}$ то решений нет.

то . Если скобка перед отрицательна, т.е. при

4.Линейные уравнения с параметрами и модулями. Графический способ решения линейных уравнений с параметрами и модулями. (4 ч.)

При изучении данной темы необходимо повторить определение модуля числа, а также свойство модуля, построение графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля. Поэтому занятия целесообразнее проводить в групповой форме.

Модуль или абсолютная величина $|f(x)|$ определяется соотношением

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{если} f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{если} f(x) < 0. \end{cases}$$

Поэтому всегда $|f(x)| \geq 0$. Это нужно учитывать при решении уравнений и неравенств с модулями. При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, часто удобно пользоваться равносильными переходами:

$$|f(x)| = q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = q(x), \\ f(x) = -q(x), \end{array}\right. \\ q(x) \geq 0. \end{cases}$$

П р и м е р 4. Для всех значений параметра а решить уравнение:

$$|x - a| = x - 2.$$

Р е ш е н и е. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - a = x - 2, \\ x - a = -(x - 2), \end{array}\right. \\ x - 2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - a = x - 2, \\ x - 2 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x - a = -x + 2, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением первой системы будет : а=2 при х≥2.

Если а=2, то решением является множество х≥2, если а ≠ 2, то решений нет.

Решением второй системы будет : х = 0,5 (а +2) при х≥2. Найдем значения параметра а, при которых выполняется условие х≥2.

Имеем 0,5 (а + 2)≥2, откуда а ≥2. Таким образом, если а ≥2,

то х = 0,5(а+2), при а=2 решение х = 0,5(2 + 2)= 2 входит в решение первой системы.

О т в е т. Если а >2, то х= 0,5(а+2), если а=2, то х≥2, если а<2, то решений нет.

5.Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметры.

6.Свойства квадратичной функции в задачах с параметрами.

Данная тема- самая главная и основная тема курса, именно здесь отводится больше часов для изучения , на уроках необходимо ввести понятие квадратного уравнения с параметром, рассмотреть зависимость корней от коэффициента а и дискриминанта. Учащиеся должны представлять, как может проходить график параболы в том или ином случае. В данной теме больше внимания уделить урокам-практикумам

Определение. Уравнение вида $Ax^2 + Bx + C = 0$, где A,B,C – выражения, зависящие от параметров, $A \neq 0$, а x – неизвестное, называется квадратным уравнением с параметрами.

Во множестве действительных чисел это уравнение исследуется по следующей схеме:

1) Если $A = 0$, то имеем линейное уравнение $Bx + c = 0$.
2) Если $A \neq 0$ и дискриминант уравнения $D = B^2 - 4AC < 0$, то уравнение не имеет действительных решений.
3) Если $A \neq 0$ и дискриминант уравнения $D = B^2 - 4AC = 0$,то уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{B}{A}$.
4) Если $A \neq 0$ и дискриминант уравнения $D = B^2 - 4AC > 0$, то уравнение имеет два различных корня

$$X = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}.$$

При решении квадратного уравнения с параметрами контрольными будут те значения параметра, при которых первый коэффициент А обращается в ноль. Дело в том, что если этот коэффициент равен нулю, то уравнение превращается в линейное и решается по соответствующему алгоритму; если же этот коэффициент отличен от нуля, то имеем квадратное уравнение, которое решается по иному алгоритму (меняется процедура решения, а в этом и состоит качественное изменение уравнения). Дальнейшее решение зависит от

D.

5. Квадратичная функция и ее график

1°. Функцию, заданную формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x, y — переменные, a, b и c — заданные числа, причем $a \neq 0$, называют ***квадратичной***.

2°. Областью определения квадратичной функции является множество $\boldsymbol{R}$.

3°. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. При этом:

а) если $a > 0$, то ее ветви направлены вверх;

б) если $a < 0$, то ее ветви направлены вниз;

в) осью симметрии параболы служит прямая $x = -\frac{b}{2a}$.

4°. Координаты вершины параболы находят по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = y(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

П р и м е р 5 . Решить уравнение для всех значений параметра a

$$(a — 1)\, x^2+2\,(2a+1)\, x+(4a+3) =0;$$

Р е ш е н и е. В данном случае контрольным является значение a=1. Дело в том, что при a=1 уравнение является линейным, а при $a \neq 1$ оно квадратное (в этом и состоит качественное изменение уравнения). Значит, целесообразно рассмотреть это уравнение как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра: 1) a=l; 2) $a \neq 1$.

Рассмотрим эти случаи.

1) При a=1 уравнение примет вид бx+7=0. Из этого

уравнения находим x= - $\frac{7}{6}$.

2) Из множества значений параметра $a \neq 1$ выделим те значения, при которых дискриминант обращается в 0.

Дело в том, что если дискриминант $D=0$ при $a=a_o$, то при переходе значения D через точку a_o дискриминант может изменить знак (например, при $a<a_o$ D< 0, а при $a>a_o$ D>0). Вместе с этим при переходе через точку a_o меняется и число действительных корней квадратного уравнения (в нашем примере при $a<a_o$ корней нет, так как D< 0, а при $a>a_o$ D>0 уравнение имеет

два корня). Значит, можно говорить о качественном изменении уравнения. Поэтому значения параметра, при которых обращается в 0 дискриминант квадратного уравнения, также относят к контрольным значениям.

Составим дискриминант уравнения :

$\frac{D}{4}$ =(2a+ l)^2 — (a — 1) (4a+3). После упрощений получаем $\frac{D}{4}$ = 5a+4.

Из уравнения $\frac{D}{4}$ =0 находим $a= -\frac{4}{5}$ — второе контрольное значение параметра

a. При этом если $a < -\frac{4}{5}$, то D <0; если $a \geq -\frac{4}{5}$, , то D≥0 $a \neq 1$

Таким образом, осталось решить уравнение в случае, когда $a< -\frac{4}{5}$ и в случае, когда $\{ a \geq -\frac{4}{5}, a \neq 1 \}$.

Если $a< -\frac{4}{5}$, то уравнение не имеет действительных корней; если же $\{ a \geq -\frac{4}{5}$, a ≠ 1 }, то находим $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$

О т в е т: 1) если $a< -\frac{4}{5}$, то корней нет ; 2) если a= 1, то x = -$\frac{7}{6}$;

3) $a \geq -\frac{4}{5}$, то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$, $a \neq 1$

Крамор В.С. стр 42

1. При каких значениях параметра a отношение корней уравнения $x^2 + ax + a + 2 = 0$ равно 2?

1. Пусть x_1 и x_2 — корни данного квадратного уравнения, причем

$$\frac{x_1}{x_2} = 2. \qquad (1)$$

2. Тогда $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. С другой стороны,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2},$$

и, значит,

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{5}{2}. \qquad (2)$$

3. Для тех значений a, при которых выполнено соотношение (1), должно также выполняться равенство (2).

4. Согласно теореме Виета, $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = a + 2$. Поэтому равенство (2) можно записать следующим образом:

$$\frac{a^2 - 2(a+2)}{a+2} = \frac{5}{2}, \text{ или } 2a^2 - 9a - 18 = 0,$$

откуда $a_1 = 6$, $a_2 = -\frac{3}{2}$.

5. *Ответ*: $a_1 = 6$; $a_2 = -\frac{3}{2}$.

2. В уравнении $3x^2 - 7x + c = 0$ найти значение параметра c, если корни уравнения удовлетворяют соотношению

$$\left(x_1 + \frac{2}{3}\right)(x_2 - 1) = 1. \qquad (1)$$

1. Согласно теореме Виета, имеем

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{3}. \qquad (2)$$

2. Используя равенства (1) и (2), составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} - x_2, \\ \left(\frac{7}{3} - x_2 + \frac{2}{3}\right)(x_2 - 1) = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} - x_2, \\ x_2^2 - 4x_2 + 4 = 0, \end{cases}$$ откуда $x_2 = 2$.

3. Тогда из первого уравнения системы (3) найдем $x_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$.

4. Снова воспользуемся теоремой Виета и получим, что $x_1 x_2 = \frac{c}{3}$; тогда $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{c}{3}$; т. е. $c = 2$.

5. *Ответ*: $c = 2$.

3. Найти все значения a, для которых разность корней уравнения

$$2x^2 - (a+1)x + a + 3 = 0 \qquad (1)$$

равна 1.

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения (1), причем $x_2 > x_1$.

2. Тогда $x_2 - x_1 = 1$, или $(x_2 - x_1)^2 = 1$, т. е.

$$x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 = 1. \qquad (2)$$

3. Упростив левую часть равенства (2), получим

$$x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 = (x_2 + x_1)^2 - 2x_2x_1 - 2x_2x_1 = \\ = (x_2 + x_1)^2 - 4x_2x_1 = 1. \qquad (3)$$

4. По теореме Виета $x_2 + x_1 = \frac{a+1}{2}$; $x_2x_1 = \frac{a+3}{2}$. Следовательно, равенство (3) можно записать так:

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{a+3}{2} = 1. \qquad (4)$$

5. Решив уравнение (4), получим ответ.

6. *Ответ*: $a = -3$; $a = 9$.

4. При каких значениях k уравнение

$$kx^2 - x + 3 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

1. Пусть $k = 0$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $x = 3$.

2. Пусть $k \neq 0$. Тогда уравнение (1) является квадратным, а его дискриминант равен $D = 1 - 12k$. Так как уравнение должно иметь единственное решение, то его дискриминант должен быть равен нулю: $1 - 12k = 0$, т. е. $k = \frac{1}{12}$.

3. *Ответ*: $k = 0$; $k = \frac{1}{12}$.

5. Найти все значения параметра p, при которых корни уравнения

$$(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0 \qquad (1)$$

действительны и положительны.

1. Предположим сначала, что $p \neq 3$. Для того чтобы корни квадратного уравнения были действительными, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант D уравнения (1) был неотрицателен. Так как

$$D = 4p^2 - 24p(p-3) = 4p(18 - 5p),$$

то неравенство $D \geqslant 0$ выполняется при

$$0 \leqslant p \leqslant 3{,}6. \qquad (2)$$

2. Действительные корни x_1 и x_2 уравнения (1) положительны

в том и только в том случае, когда их сумма и произведение положительны, т. е.

$$x_1 + x_2 = \frac{2p}{p-3} > 0,\ x_1 x_2 = \frac{6p}{p-3} > 0,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{2p}{p-3} > 0, & (3) \\ \dfrac{6p}{p-3} > 0. & (4) \end{cases}$$

3. Система неравенств (2), (3), (4) удовлетворяется при

$$3 < p \leqslant 3{,}6. \qquad (5)$$

4. Заметим теперь, что при $p = 3$ уравнение (1) имеет единственный положительный корень $x = 3 > 0$. Поэтому все искомые значения p определяются неравенствами (5) и равенством $p = 3$.

5. *Ответ*: $p \in [3;\ 3{,}6]$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каких значениях a сумма корней уравнения $x^2 + (a^2 - 4a - 5)x + a^2 - 6a + 1 = 0$ равна нулю?

2. При каких значениях a разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$ равна их произведению?

3. Найти значения a, при которых отношение корней уравнения $x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 4 = 0$ равно 5.

4. При каких значениях a имеют общий корень уравнения:

а) $3ax^2 - 5x + 2a = 0$ и $2x^2 + ax - 3 = 0$;

б) $x^2 - (a - 1)x = 3$ и $4x^2 - (4a + 3)x + 9 = 0$?

5. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2 - 5x - 3a = 0$ втрое больше одного из корней уравнения $x^2 - 6x + 4a = 0$?

6. Найти все значения a, при которых квадратный трехчлен $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1$ положителен для всех значений x.

7. При каких значениях a уравнение:

а) $x^2 - 7x + a = 0$ имеет два равных корня;

б) $x^2 + x\sqrt{a^2 - 1} + a - 1$ имеет два равных корня;

в) $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ имеет единственный корень?

8. Решить уравнение:

а) $a(a + 1)x^2 + x - a(a - 1) = 0$;

б) $ax^2 + (2a - 1)x + a - 2 = 0$;

в) $(a^2 + a - 2)x^2 + (2a^2 + a + 3)x + a^2 - 1 = 0$;

г) $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0$.

9. Решить уравнение:

а) $\frac{a}{x} + \frac{a-1}{x-1} = 2$; б) $\frac{x}{a} + \frac{a-1}{x-1} = 2$;

в) $x + \frac{bx}{x-2a} = \frac{2ab}{x-2a}$; г) $\frac{x^2 - (a+1)x - (a+2)}{(x+2)(x-3a)} = 0$.

Заключение

Введение элективного курса «Методы решения задач с параметрами» необходимо учащимся в наше время, как при подготовке к экзаменам, так и к собеседованиям в средне – технические учебные заведения и поступления в 10 класс. Владение приемами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

Решение задач, уравнений с параметрами, открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применяемых в исследованиях и на любом другом математическом материале. Именно такие задачи играют большую роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников, Поэтому учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются с другими задачами.

Литература

1. Крамор В.С. Задачи с параметрами и методы их решения-М; 2007 г
2. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - М.: ИЛЕКСА, 2005.
3. Крамор В.С. Математика. Типовые примеры на вступительных экзаменах. - М.: Аркти, 2000.
4. Мочалов В.В., Сильвестров В.В. Уравнения и неравенства с параметрами. Чебоксары. Издательство ЧГУ,1997
5. Математика для поступающих в вузы //Сост. А.А.Тырымов. – Волгоград: Учитель, 2000.
6. Математика. Задачи М.И.Сканави. - Минск; В.М.Скакун,1998г.
7. Математика. «Первое сентября».№ 4, 22, 23-2002 г; №12,38-2001 г
8. Нырко В.А.,Табуева В.А. Задачи с параметрами. - Екатеринбург; УГТУ,2001.
9. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. – М. Просвещение, 1988г
10. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Уравнения и неравенства с параметрами. Издат МГУ, 1992г
11. Горбачев В.И. Методы решения уравнений и неравенств с параметрами, Брянск, 1999.
12. Математика. Тесты для подготовки ЕГЭ-2011. Учебно -тренировочные тесты. Задания с параметром. Под ред. Ф.Ф.Лысенко. Ростов –на- Дону, Легион, 2008